Derivación de funciones trigonométricas

Función	Derivada
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$

La **derivación de las funciones trigonométricas** es el proceso matemático de encontrar el ritmo al cual una función trigonométrica cambia respecto de la variable independiente; es decir, la derivada de la función. Las funciones trigonométricas más habituales son las funciones *sin(x)*, *cos(x)* y *tan(x)*. Por ejemplo, al derivar *f(x)* = *sin(x)*, se está calculando la función *f'(x)* tal que da el ritmo de cambio del *sin(x)* en cada punto *x*.

Derivada de la función seno

A partir de la definición de la derivada de una función $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Por tanto si $f(x) = \sin(x)$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

A partir de la identidad trigonométrica $\sin(A + B) = (\sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$, se puede escribir

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \cos(x)\sin(h) - \sin(x)}{h}$$

Agrupando los términos $\cos(x)$ y $\sin(x)$, la derivada pasa a ser

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h) - \sin(x)(1-\cos(h))}{h}$$

Reordenando los términos y el límite se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\cos(x)\sin(h)}{h} - \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)(1-\cos(h))}{h}$$

Ahora, como $\sin(x)$ y $\cos(x)$ no varían al variar h, se pueden sacar fuera del límite para obtener

$$f'(x) = cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} - \sin(x) \lim_{h \to 0} \frac{(1 - \cos(h))}{h}$$

El valor de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{(1 - \cos(h))}{h}$$

Son 1 y 0 respectivamente. Por tanto, si $f(x) = \sin(x)$,

$$f'(x) = \cos(x)$$

Derivada de la función coseno

Si $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x + h) - \cos(x)}{h}$$

A partir de la identidad trigonométrica $\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$, se puede escribir

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)\cos(h) - \sin(x)\sin(h) - \cos(x)}{h}$$

Operando se obtiene

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cos(x)(\cos(h) - 1) - \sin(x)\sin(h)}{h}$$

Como $\sin(x)$ y $\cos(x)$ no varían al variar h, se pueden sacar fuera del límite para obtener

$$f'(x) = cos(x) \lim_{h \to 0} \frac{\cos(h) - 1}{h} - \sin(x) \lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h}$$

El valor de los límites

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin(h)}{h} \quad \text{y} \quad \lim_{h \to 0} \frac{(\cos(h) - 1)}{h}$$

Son 1 y 0 respectivamente. Por tanto, si $f(x) = \cos(x)$,

$$f'(x) = -\sin(x)$$

Derivada de la función tangente.

A partir de la regla del cociente, según la cual si la función que se quiere derivar, $f(x)$, se puede escribir como

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

y $h(x) \neq 0$, entonces la regla dice que la derivada de $g(x) / h(x)$ es igual a:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) = \frac{g'(x)h(x) - g(x)h'(x)}{[h(x)]^2}$$

A partir de la identidad trigonométrica

$$\tan(x) = \frac{sin(x)}{\cos(x)}$$

haciendo

$g(x) = \sin(x)$ $g'(x) = \cos(x)$
$h(x) = \cos(x)$ $h'(x) = -\sin(x)$

sustituyendo resulta

$$f'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)[-\sin(x)]}{\cos^2(x)}$$

operando

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}$$

y aplicando las identidades trigonométricas

$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ $$\sec(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$$

resulta

$f'(x) = \sec^2(x)$